

文章编号: 1000-8055(2010)09-2006-07

失谐叶盘结构的概率响应局部化特性

于长波, 王建军, 李其汉

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 基于某典型叶盘结构的减缩有限元模型和 Monte Carlo 响应面法数值计算, 详细分析了几何参数失谐叶盘结构的概率响应局部化特性. 给出了几何失谐叶盘结构的有限元建模及减缩方法, 并通过定义响应放大因子对受迫响应的局部化程度进行定量描述, 分别计算了不同形式的随机失谐和主动错频叶盘结构的概率局部化特性, 讨论了失谐形式和失谐参数的影响规律等. 研究表明, 随着失谐程度的增加, 失谐系统的响应水平及其分散程度都会有一个峰值存在.

关 键 词: 叶盘结构; 几何失谐; 错频设计; 概率响应局部化; 减缩有限元模型

中图分类号: V231.9; O342

文献标识码: A

Probability characteristics for response localization of mistuned bladed disk assemblies

YU Chang-bo, WANG Jian-jun, LI Qi-han

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on the reduced-order finite element (FE) model and its Monte Carlo response surface method, the localization characteristics of a typical bladed disk with geometry mistuning were researched in detail, with particular regard to the subjects of the probability characteristics for the forced response. An FE modeling method of bladed disks with geometry mistuning was given, and the order-reduction method was presented as well. Then the response properties of the tuned structure were discussed. The response magnification factor was defined to assess quantitatively the behavior of the vibratory localization. The statistical characteristics of the forced response of the stochastically mistuned and detuned structures were simulated and their main properties were explained. Results indicate that there is a peak phenomenon in the mean values and standard deviations of the response with the increasing mistuning strength.

Key words: bladed disk; geometry mistuning; detuning design; probability characteristics for response localization; reduced-order finite element model

叶盘结构理论上是圆周周期对称结构, 各叶片轮盘扇区具有完全相同的物理参数和几何参数, 但由于制造误差和使用中的不均匀磨损等因素, 叶盘结构中总是不可避免地存在失谐现象, 有时设计者还会人为地引入某些特定形式的失谐,

通过改变典型工况的叶片固有模态频率来提高结构的颤振裕度, 改良响应特性, 这种现象也称为“错频(detuning)”. 无论是被动失谐还是人为失谐(错频), 都会破坏叶盘结构原有的圆周对称性, 引发振动局部化现象, 造成部分叶片振幅过大, 应

收稿日期: 2009-07-21; 修订日期: 2009-09-10

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2008AA04Z403)

作者简介: 于长波(1982-), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 主要从事航空发动机强度振动方面的研究.

力急剧升高,致使叶片过早地出现疲劳失效,因此有效地预测和抑制失谐的不利影响对于发动机的结构完整性和工作可靠性至关重要^[1]。

迄今为止,国内外学者采用各种模型和方法对确定和随机失谐的叶盘结构振动问题进行了研究^[1-6],但对于人为失谐(错频)结构的振动问题关注较少,尤其是错频在提高结构气弹稳定性的同时是否会导致较严重的局部化,对其高循环寿命会产生何种影响等问题,现有的研究中尚不多见。文献[7]以两种典型的实际错频失谐方案为例,研究了谐调和“错频失谐”情况下叶盘结构振动模态局部化性质。文献[8]提出了基于叶片型面(几何)参数的错频结构有限元建模方法,并通过定义应变能局部化因子对错频结构的概率模态局部化特性进行了研究。上述研究主要着眼于固有特性分析,目的在于解释失谐(错频)的机理,并对其影响给出定量的评价。

尽管失谐叶盘结构的固有特性研究初步揭示了失谐参数对叶盘结构的影响,但我们更为关心的是与叶片高周疲劳性质直接相关的应力等响应参数,因此进行失谐叶盘结构的受迫响应分析是十分必要的。Castanier 和 Pierre^[9]以集中参数模型为研究对象,在计算失谐结构概率响应特性的基础上将谐波形式的人为失谐引入系统,利用数值模拟方法得到了谐波失谐的幅值与谐波数等参数对受迫响应的影响。Yu 等^[10]在此基础上又综合考虑了耦合与阻尼的作用。两者均采用了简化的单自由度扇区集中参数模型,侧重于错频问题的机理性分析。在工程问题方面,文献[11]运用高保真的模态综合降阶技术,基于有限元模型研究了错频参数对于系统响应的作用规律,研究中作者直接将叶片的刚度作为错频参数(可以模拟工程中叶片材料参数发生变异而导致的失谐现象),但实际上叶片的失谐以及错频多会改变叶片的型面参数(如厚度等),叶片的刚度和质量都发生了变异,因而其计算结果并不能真实地体现结构中的局部化状态。此外,作者在文中通过位移放大系数来描述结构的局部化状态,然而在响应问题上人们实际上更为关注的是最大应力水平的改变(进而由此来预测系统的疲劳寿命),而对于几何参数失谐结构其应力和位移的变化趋势往往存在一定的差异,这会导致文中一些结论的工程实用性受到很大的限制,因而如何精确地模拟叶盘结构的失谐与错频现象并合理地评价振动局部化水平^[12]对于叶盘结构的可靠性分析与振动设计具

有十分重要的意义。

本文以叶片的几何参数作为失谐参数,通过改变不同叶片型面坐标的方式对加工误差、使用磨损以及错频装配引起的失谐进行模拟。首先给出了某型叶盘结构的有限元模型及作用于其上的行波激励形式,并通过子结构方法对轮盘部分的自由度进行了减缩,然后从振动应力的角度定义了响应放大因子对振动局部化水平进行定量描述,最后采用 Monte Carlo 响应面法分别对随机失谐和错频叶盘结构的概率响应特性进行了研究,为实际叶盘结构设计加工中的公差控制和人为失谐模式的设计提供了有益的参考依据。

1 结构模型及谐调结构的响应特性

1.1 结构有限元模型及其简化

某航空发动机压气机叶盘结构的有限元模型如图1所示,结构中有24个叶片,采用 solid 45 实体单元划分网格,其中在轮盘中心孔的内表面处施加位移约束,模型中共有17 400个单元、28640个节点。

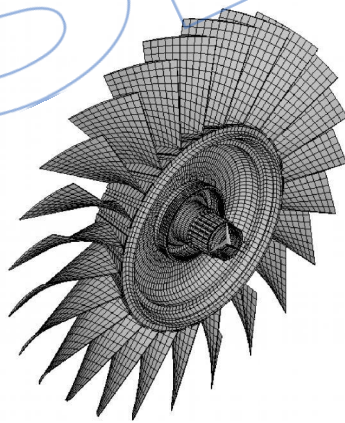


图1 叶盘结构的有限元模型

Fig. 1 Finite element model of the bladed disk

由于失谐破坏了叶盘结构的周期对称性,因而计算中必须采用完整的有限元模型,这使得计算规模较大,尤其是对概率响应问题进行抽样统计求解,会耗费过多的计算资源,因而必须采取适当的手段进行模型减缩。由于失谐一般出现在叶片上,对于不同的失谐形式,轮盘部分的各项物理参数和约束条件并未改变,属于重复的几何结构,因而可以考虑利用 ANSYS 程序的子结构减缩模块,仅保留轮盘上的部分关键节点,将其单独做成超单元,然后在每次抽样过程中将其拷贝到轮盘的位置上,与其他所有的叶片单元共同参与计算。

如图 2 所示, 经过简化后的叶盘结构中共有 3 121 个单元、7 752 个节点, 与原有模型相比, 计算规模得到了大幅减缩.

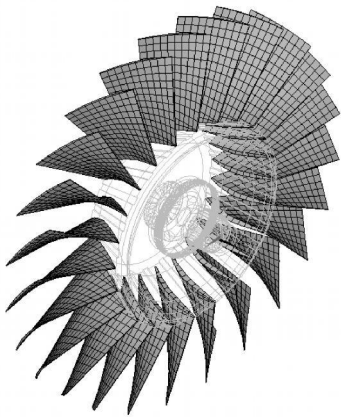


图 2 叶盘结构的减缩模型

Fig. 2 Reduced order model of the bladed disk

1.2 激振形式与谐调结构的响应

方便起见, 将每个叶片所承受的载荷简化为单点激励状态, 即将激振力施加在每个叶片的叶尖处相对应的同一节点上. 在旋转状态下叶盘结构中叶片所受的尾迹激励可以表示为行波的形式, 那么作用在第 i 个叶片上的激励可以写为

$$f_i = F \sin(\omega t + i\theta) \tag{1}$$

其中

$$\theta = \frac{2\pi E}{N}$$

θ 是行波激励的叶间相角, ω 为激振频率, E 为激励阶次, N 为叶片数, F 为激振力的幅值, 在本文中取为 1. 由式(1)可知, 行波激振力在时间和空间上的分布均呈简谐形式, 相邻叶片之间的激振力相差固定的相位角, 其大小由激励阶次 E 决定.

在谐调结构上施加如式(1)定义的行波激励, 分别计算不同激励阶次作用下系统的稳态响应. 这里, 选取激振力的频率扫描范围为系统第一族模态对应的频段, 主要研究叶片一弯振动形式的响应. 这主要是基于以下几方面的考虑: 第一, 在这一频率范围内系统的模态成分高度密集, 系统失谐后容易发生振动局部化; 第二, 这一族模态距离其他族模态较远, 失谐前后系统的响应形式不易发生变化, 易于对振动局部化现象进行辨识与评价; 第三, 被激起的这一族模态以叶片振动为主, 轮盘的振动非常微弱, 因而进行子结构减缩时所忽略的轮盘惯性项不会对计算结果带来过大的误差; 第四, 一弯模态是叶片振动最基本的形式,

在其他较复杂的响应形式中可能有一定比重的参与, 对其分析得到的结果也可以推广到许多其他形式的振动.

由于谐调结构各扇区是完全一致的, 因而各叶片的稳态响应幅值是相等的, 只是各相邻扇区之间的响应存在相位差 θ . 计算得到的系统在 1 阶激励下的频响曲线如图 3 所示, 其他各阶次激励下的共振频率和最大响应幅值列于表 1 中, 计算结果表明:

- 1) 对于不同的激励阶次 E , 谐调系统的频响曲线在扫频范围内都只有一个峰值, 且对应于系统 E 节径振动的固有频率(“三重点”理论);
- 2) 在所有的激励阶次中, 当 $E = 1$ 时叶片响应幅值最大, 达到 0.1592mm, 这说明在这一激励频率范围内系统的响应对 1 阶激励最为敏感, 在失谐系统的振动局部化研究中需进行重点考虑.

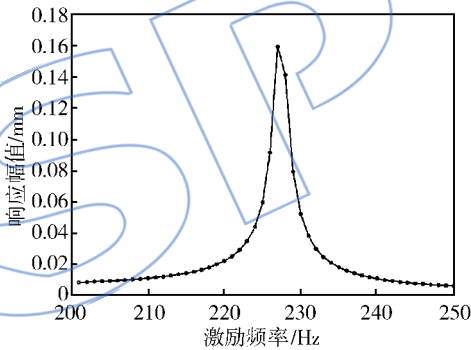


图 3 谐调系统的频率响应 (1E 激励)

Fig. 3 Frequency response of tuned system (1E excitation)

表 1 各阶次激励下叶盘耦合系统的共振频率和最大幅值

Table 1 Resonant frequencies and max amplitudes of the bladed disk subjected to different orders of excitation

激励阶次	共振频率/Hz	响应幅值/mm
0	223	0.1131
1	227.5	0.1592
2	233.1	0.1203
3	234.2	0.1084
4	234.6	0.0992
5	235	0.1075
6	235.4	0.0988
7	235.7	0.0997
8	235.9	0.1055
9	236.1	0.1052
10	236.2	0.1028
11	236.3	0.1007
12	236.3	0.0999

2 失谐叶盘结构的响应特性分析

2.1 失谐叶盘结构的建模方法

本文以叶片的型面厚度为失谐参数, 基于 ANSYS 程序的前处理功能建立失谐叶盘结构的有限元模型^[8], 主要步骤如图 4 所示。

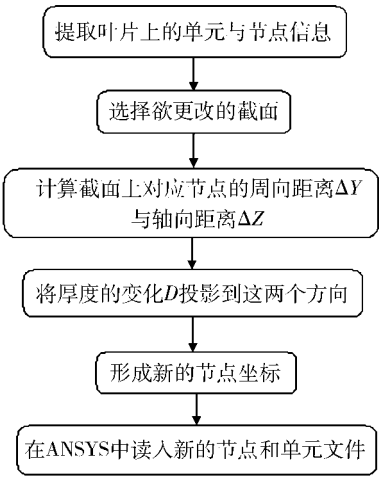


图 4 几何失谐叶盘结构的建模方法流程
Fig.4 Flow chart of modeling method for bladed disk with geometry mistuning

对于各种含有随机因素的失谐问题, 只需要令 D 服从设定形式随机分布, 在每一次模拟中执行上述步骤即可建立相应的样本模型。这种建模方法直接对叶片上的单元和节点进行操作, 可以根据需要对每个叶片的各个翼型截面进行不同的加厚或减薄操作, 能够比较准确地模拟加工误差、使用磨损以及叶片的错频装配等各种确定和随机因素引起的结构失谐, 具有很强的实用性。

2.2 振动局部化的定量描述

前面提到, 在理想状态下叶盘结构上各叶片的振动幅值是相等的, 相邻叶片的振动相位相差 θ 。当存在失谐后, 系统中会出现振动局部化, 各叶片的响应幅值不再相等, 振动只局限在了少数几个叶片上。为此定义了响应放大因子用以定量描述失谐叶盘结构的受迫响应局部化现象。

由于以往的工作多是基于集中参数模型开展的, 人们只能采用弹簧振子的最大振动位移作为失谐局部化的度量, 但是失谐响应分析的核心目的往往在于系统的强度、寿命和可靠性等研究, 因而以系统最大应力的变化作为评价振动局部化的指标更加具有实际意义, 特别是对于叶片型面(几何)参数出现失谐的结构(包括错频结构), 其各个

叶片上的位移分布与应力分布往往存在不小的差异, 若还通过位移来描述局部化程度是不够恰当的, 为此从最大振动应力的角度定义了失谐叶盘结构的响应放大因子

$$\delta = \frac{S_{mistune}}{S_{tune}}$$

式中 $S_{mistune}$ 为失谐系统各叶片的最大应力幅值, S_{tune} 为谐调系统中叶片的应力幅值。这种定义反映了失谐后系统振动应力在各叶片间分布的集中程度, 不仅可以用来评价失谐系统的振动局部化现象, 还可以用于系统的寿命预测与评估等。而且与传统的位移放大因子相比, 这种应力放大因子不受振动形式的限制, 对于叶片的各阶弯曲、扭转以及组合振动形式皆可适用。

一般说来, 响应放大因子 δ 越大说明响应局部化现象越为严重, 轮盘上最大振动叶片的响应比谐调时有更大的增加。对于谐调结构的响应, 其 $\delta = 1$ 。另一方面, 失谐叶盘结构概率响应特性的描述涉及随机场, 一般是较为复杂的, 而上面定义的响应放大因子可以将随机场的每一样本矢量转换为随机变量的一个样本值, 这些样本值的集合则形成了表征稳态响应概率特性的随机变量, 而且具有明确的物理意义, 即该随机变量的特征参数(均值和标准差)反映了失谐导致的结构中最大应力增大程度的统计特性。

2.3 随机失谐叶盘结构的概率响应特性

将叶片厚度的变化 D 作为系统的失谐参数(同一叶片上各翼型截面上的变化量保持一致), 令其服从均值为 0, 标准差分别为 1%~10% 的正态随机分布, 用以模拟叶片上由于加工误差和使用磨损等原因导致的失谐现象。应用 Monte Carlo 响应面法研究系统的概率响应局部化特性, 其中取 Monte Carlo 模拟的样本数 $N_{MC} = 50$, 而响应面上的抽样次数 $N_{rs} = 10000$ 。计算得到失谐程度(失谐参数的标准差)与响应放大因子均值之间的关系曲线如图 5 所示。

与文献[11]得到的结论相似, 随着失谐程度的升高, 系统的响应放大因子随着失谐程度的升高呈现先增大后减小的变化趋势: 当失谐程度较小时, 系统的局部化随失谐程度的增加而加剧, 当失谐幅值为 4% 时, 响应放大因子达到峰值, 此后若失谐程度继续增加, 系统的响应放大因子反而会有所下降。这主要是因为, 当系统失谐程度较轻时, 系统的模态成分仍比较密集, 失谐可以看作是对谐调系统的摄动, 因而失谐量越大其引起的局

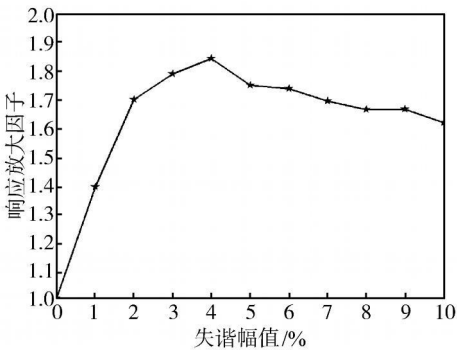


图 5 失谐程度与响应放大因子的关系曲线

Fig. 5 Response magnification versus mistuning strength

部化现象越严重;而当失谐程度继续增大直至超过某一阈值后,系统相对原谐调系统有了较大的偏离,系统的频率结构越来越分散,不再具备产生局部化的基本条件,因而失谐的继续增大不会再引起更严重的振动局部化。

图 6 所示为不同失谐程度下响应放大因子的概率密度曲线,由于曲线与横轴所包围的面积均为定值 1(即所有样本值出现的概率之和),因而曲线的高度说明了响应放大因子在其均值周围分布的密集程度,代表了系统对失谐的敏感性:曲线越高说明响应放大因子分布得越为密集,局部化的范围越有限,系统对于失谐越不敏感;曲线越扁则说明同样的失谐引起的响应局部化程度越分散,局部化的范围越宽泛,系统对于失谐的敏感性越强。曲线的位置则代表了局部化因子的大小(曲线峰值的位置描述了局部化因子的均值),曲线越靠右,则响应放大因子越大,局部化程度越严重;反之,曲线的位置越靠左,则代表局部化的程度越轻微。

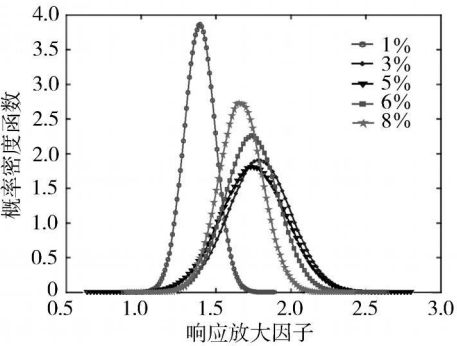


图 6 响应放大因子的概率密度曲线

Fig. 6 Probabilistic density function of the response magnification factor

根据图 6, 响应放大因子的标准差随失谐幅

值的升高也会体现出“阈值”效应:当失谐由 1% 增加至 5% 时,曲线形状越来越扁平,响应放大因子越来越分散;但是当失谐超过 5% 后继续增加时,曲线形状又逐渐细高起来,响应放大因子分布得反而越来越密集。这意味着,当随机失谐的幅值距离这个阈值越远时,系统中振动局部化的水平就越低,且其分布的范围也越窄小,系统对失谐的敏感性也越弱。由此可见,精确控制叶片的加工误差和使用磨损,对于降低叶盘结构的振动局部化及提高叶片的疲劳寿命具有十分重要的意义。

上述计算结果说明,当系统中叶片厚度的变化量低于或高于某些特定值时,系统中的振动局部化程度相对较低,而且分布的区间也比较狭小,系统对失谐的敏感性较弱,因而可以考虑在这一失谐范围内引入适当的人为失谐,在一定程度上避免系统中出现过高的局部化水平。

2.4 错频叶盘结构的概率响应特性

2.4.1 叶片频率的模拟

叶片的错频装配是叶盘结构中出现失谐的另一个主要原因。错频可以丰富叶盘结构的模态成分,增强模态间的耦合,因而是用来抑制颤振的常用手段之一,但是错频破坏了叶盘结构的周期对称性,使得部分叶片振动应力急剧升高,结构中过早地出现疲劳破坏,因而对错频叶盘结构的振动局部化特性加以研究是十分必要的。

工程上,一般是以同一理论型面为基础,在不过多影响结构气动性能的前提下,采用在不同叶型截面上改变叶片的厚度作为分组手段来达到调频的目的。首先,根据叶片的型面特征选取一个基准叶型截面,通过对该截面的以上和以下的全部叶型进行减薄处理得到的叶片频率与原型相比升高和降低的变化量基本一致,这样便得到了高频、低频和原型三种叶片。考虑到加工精度和加工误差的影响,每组中各叶片的实测频率都会有一定的分散度,在其额定值附近呈随机分布。装配时,按照相邻叶片及特定叶片之间一定的频率差要求,在生产出的三组叶片中选取合适的安装到轮盘上。可以看出,每一次错频装配实际上都是一个随机事件。

进行数值仿真时,由于频率是选取叶片的依据,而改变叶型厚度是实施错频的手段,因而首先需要分别建立高频、低频和原型三种叶片中频率和叶型之间的函数关系表达式,然后再分别以三种叶片的额定频率为均值,按照一定的标准差,生成三组随机频率样本,根据装配的频率差要求,在

三组样本中依次选择合适的叶片频率, 并判断其叶型的种类, 最后再根据该种叶型与频率的对应关系, 得到该失谐叶片的叶型参数, 这样便完成了错频装配的一次随机模拟。

采用 ANSYS 参数化设计语言 APDL 编写代码, 对错频结构进行循环仿真, 考虑到精度要求和计算成本, 计算中仍采用了 Monte Carlo 响应面法, 首先运行 Monte Carlo 方法, 取循环次数 $N_{MC} = 50$, 再由这些结果拟合响应表面, 并在其上再次进行循环抽样, 由于这一过程的计算效率很高, 因而取抽样次数 $N_s = 10000$, 对上述计算结果进行统计分析即可得到系统的概率响应局部化特性。

在不同的频率误差下叶片固有频率的概率密度函数如图 7 所示, 其中叶片频率误差是指每组叶片频率样本的标准差, 其值越小代表加工精度越高, 生产出的叶片频率越接近于该组叶片的额定频率。可以看出, 每条曲线都有 3 个峰值, 分别对应于三组叶片的额定频率, 随着频率误差的增大, 曲线的高度降低, 覆盖的频率范围增大。由于叶片在装配时受到频率差要求的限制, 轮盘上每组叶片所占有的比重也各不相同: 当频率误差较小时, 三组叶片频率差异显著, 分布相对独立, 在轮盘上所占的比例大致相当; 随着频率误差的增大, 各组叶片之间的交叉区域扩大, 使得曲线上三个部分的边界逐渐模糊, 由于各组叶片所覆盖的频率范围增大, 因而处于分布范围中间段的原型组叶片更易于符合错频装配的频率查要求, 因而轮盘上这一组叶片所占的比例越来越高。

谐调的, 而是低频、原型和低频三种额定设计的叶片在轮盘上呈交替排布, 每相邻的三个叶片构成了一个“三叶片扇区”, 整个叶盘结构可以看作是由多个这种扇区构成的“扇区循环对称系统”, 因而此时结构的响应虽然与谐调状态相比有所放大, 但其局部化水平仍然较低; 当各组叶片的频率开始出现误差后, 系统的“扇区循环对称性”受到了破坏, 导致振动局部化现象加剧; 而随着频率误差的增大, 三组叶片中频率分布的越来越分散, 三个随机总体之间的界限越来越模糊 (如图 8 所示), 三组分布逐渐混合在一起形成了一个覆盖范围更大的随机分布, 这意味着轮盘上的各叶片频率分布得更加分散, 系统的模态结构不再密集, 因而频率误差的增加反而会使响应放大因子会略有下降, 系统中不会再出现更强的局部化现象。

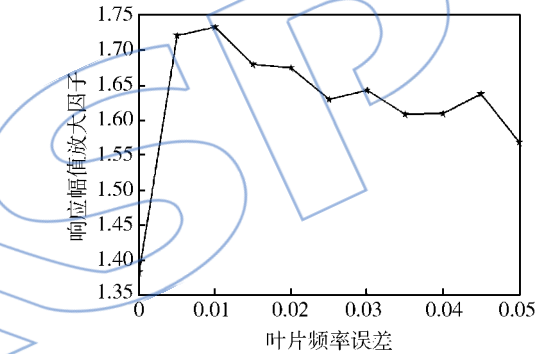


图 8 错频结构的响应放大因子
Fig. 8 Response magnification factors of the detuned structure

错频结构响应放大因子的概率密度函数如图 9 所示。可以看出, 随频率误差的增大, 响应放大因子的分散性呈先增大后减小的变化过程: 当频率误差由 1% 增加至 3% 时, 曲线的高度逐渐降低, 宽度逐渐增加, 响应放大因子分布得越来越分散, 系统对失谐更加敏感; 而当频率误差达到 3% 并继续增加时, 曲线形状的变化趋势恰好相反, 响应放大因子的标准差逐步减小, 因子分布得越来越集中, 系统对于失谐的敏感性也越来越低。

上述结论表明, 对于错频叶盘结构, 在关注其改善颤振稳定性的同时, 必须注意系统中的振动局部化现象。尤其是当生产出的叶片频率误差落在不适当的区域中时, 会导致系统对失谐过于敏感或产生过大的响应, 因而应当严格控制叶片的加工误差, 使其避开上述敏感和危险区域, 保证叶片的平均局部化程度较低, 而且分布的比较集中,

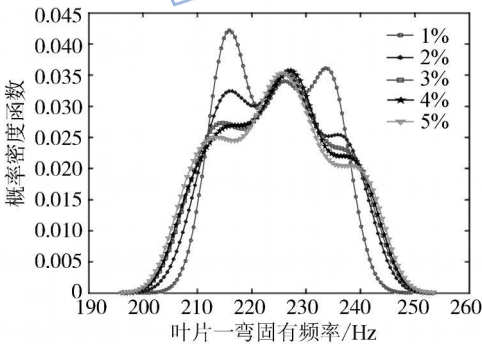


图 7 叶片频率的概率密度函数

Fig. 7 Probabilistic density function of blade frequencies

2. 4. 2 稳态响应的统计特性

计算得到的响应放大因子与叶片频率误差之间的关系曲线如图 8 所示。与随机失谐的情况不同, 当叶片的频率误差为零时, 系统也并不是完全

有利于叶盘结构安全可靠地工作.

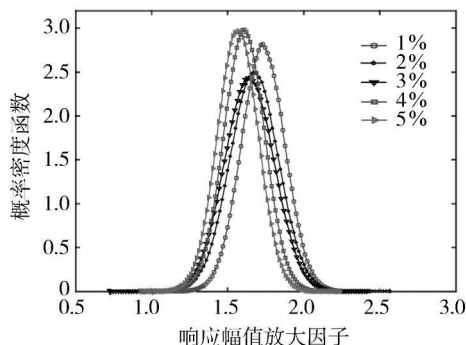


图 9 错频结构响应放大因子的概率密度

Fig. 9 Probabilistic density function of response magnification factors of the detuned structure

3 结 语

本文以叶片的几何参数作为失谐参数, 通过改变不同叶片型面坐标的方式对加工误差、使用磨损以及错频装配引起的失谐进行模拟, 定义了响应放大因子对局部化程度进行评价, 采用子结构减缩的有限元模型和 Monte Carlo 响应面方法, 较为详细计算和分析了随机失谐和主动错频叶盘结构稳态受迫响应的概率统计特性, 为失谐叶盘结构的分析设计提供了参考依据.

根据计算结果, 随着叶片厚度失谐程度或频率误差的增大, 响应放大因子的水平和分散程度基本都呈先增大后减小的变化过程, 因而需要将叶片的加工误差和使用磨损情况严格控制在适当的范围, 以避免结构中出现严重的局部化现象, 防止叶片上过早地出现疲劳失效问题.

参考文献:

[1] 王建军, 李其汉, 朱梓根. 失谐叶片-轮盘结构系统振动局部化问题的研究进展[J]. 力学进展, 2000, 30(4): 517-528.
WANG Jianjun, LI Qihan, ZHU Zigen. Vibratory localization of mistuned bladed disk assemblies—a review [J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(4): 517-528. (in Chinese)

[2] 王建军, 李其汉. 航空发动机失谐叶盘振动减缩模型与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.

[3] Castanier M P, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: status and emerging directions[J]. Journal of Propulsion and Power, 2006, 22(2): 384-396.

[4] Srinivasan A V. Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1997, 119(4): 742-775.

[5] Kielb R E, Feiner D M, Griffin J H, et al. Flutter of mistuned bladed disks and blisks with aerodynamic and FMM structural coupling[R]. GT 2004-54315, 2004.

[6] Slater J C, Minkiewicz G R, Blair A J. Forced response of bladed disk assemblies—A survey[R]. AIAA Paper 98-3743, 1998.

[7] 王建军, 于长波, 李其汉. 错频叶盘结构振动模态局部化特性分析[J]. 航空动力学报, 2009, 24(4): 788-792.
WANG Jianjun, YU Changbo, LI Qihan. Localization characteristics of vibratory mode for bladed disk assemblies [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(4): 788-792. (in Chinese)

[8] 于长波, 王建军, 李其汉. 错频叶盘结构的概率模态局部化特性分析[J]. 航空动力学报, 2009, 24(9): 2040-2045.
YU Changbo, WANG Jianjun, LI Qihan. Analysis on modal localization characteristic of random detuned bladed disk assemblies [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(9): 2040-2045. (in Chinese)

[9] Castanier M P, Pierre C. Consideration on the benefits of intentional blade mistuning for the forced response of turbomachinery rotors[J]. ASME Publication AD, 1997, 55: 419-425.

[10] Yu C B, Wang J J, Li Q H. On the individual and combined effects of intentional mistuning, coupling and damping on the forced response of bladed disks[R]. GT 2008-50960, 2008.

[11] Castanier M P, Pierre C. Investigation of the combined effects of intentional and random mistuning on the forced response of bladed disks[R]. AIAA-98-3720, 1998.

[12] 王建军, 于长波, 姚建尧, 等. 失谐叶盘振动模态局部化定量描述方法[J]. 推进技术, 2009, 30(4): 457-461.
WANG Jianjun, YU Changbo, YAO Jianyao. Vibratory mode localization factors of mistuned bladed disk assemblies [J]. Journal of Propulsion Technology, 2009, 30(4): 457-461. (in Chinese)